

Pratique Supplémentaire 6 (Corrigé)

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2 .

- a) Montrer que les matrices A , B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.
- b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Sol.:

a) $\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

- b) On vient en fait de calculer au (i) que $\text{Span}\{A, B, C\}$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Comme ce sous-espace est de dimension 3, pour obtenir une base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4, il suffit de trouver une matrice D qui n'est pas dans ce sous-espace, c-à-d pas de la forme ci-dessus. Il suffit donc de proposer une matrice $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $a \neq c + d$. On peut donc proposer par exemple $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$.

Méthode alternative :

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 & \alpha_1 + d\alpha_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + d\alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Observons que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - c - d = 0.$$

Ainsi, A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a - c - d \neq 0$.

Exercice 2

En calculant la forme échelonnée d'une matrice, montrer que le vecteur \vec{v} est dans le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Sol.: Le vecteur \vec{v} est dans l'espace engendré par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 s'il s'écrit comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs, c'est-à-dire s'il existe x_1 et x_2 tel que

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 = \vec{v}$$

Ceci est vrai si et seulement si le système $A\vec{x} = \vec{v}$ admet au moins une solution, où A est une matrice qui a pour colonnes les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . La matrice augmentée du système est donc

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Lorsqu'on échelonne la matrice augmentée, on constate qu'il n'y a pas de pivot dans la dernière colonne : le système est compatible. Donc le vecteur \vec{v} est dans l'espace engendré par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 .

Exercice 3

Trouver une base de l'espace engendré par les vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Sol.: On échelonne la matrice constituée des vecteurs colonnes $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ et \vec{v}_4 . On trouve :

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Les colonnes-pivot nous indiquent que les vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_4 sont des vecteurs de base de $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$. Autrement dit le vecteur \vec{v}_3 est combinaison linéaire des autres vecteurs

puisque c'est visiblement le cas de la troisième colonne de la matrice échelonnée d'être combinaison linéaire des autres colonnes de cette matrice échelonnée. Une autre base est donnée par la base canonique de \mathbb{R}^3 puisque les vecteurs données engendrent \mathbb{R}^3 tout entier.

Exercice 4

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de $\text{Ker}C$.
2. On note par T la transformation linéaire de \mathbb{R}^5 dans \mathbb{R}^4 définie par $T(\vec{x}) = C\vec{x}$. L'application T est-elle injective? T est-elle surjective? Justifier votre réponse.

Sol.: L'espace nul ou noyau de C est la solution générale de l'équation $C\vec{x} = \vec{0}$. On doit résoudre cette équation pour trouver une base de $\text{Ker}C$. On échelonne puis on réduit C :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} l_4 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} l_2 - \frac{5}{2}l_1 \\ l_3 - \frac{3}{2}l_1 \\ l_4 - 4l_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ l_3 + l_2 \\ \cdot \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_4 + 5l_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On réduit la forme échelonnée précédente :

$$C \sim \begin{matrix} \cdot \\ l_2 - 2l_3 \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \cdot \\ -\frac{2}{3}l_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} l_1 - l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 20/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme échelonnée réduite de C est donc $C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On écrit le système $C'\vec{x} = \vec{0}$ sous la forme classique, pouvant à présent exprimer chaque inconnue principale en fonction des inconnues secondaires :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{10}{3}x_5 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{26}{3}x_5 = 0 \\ x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{26}{3}x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 4x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

La forme vectorielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la solution générale du système $C\vec{x} = \vec{0}$:

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le noyau de C est engendré par les vecteurs obtenus ci-dessus, que l'on choisit par exemple de multiplier par 3 pour éviter des fractions :

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 26 \\ 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. L'application T n'est pas surjective puisque l'espace des colonnes n'engendre pas \mathbb{R}^4 et elle n'est pas injective puisque le vecteur nul n'est pas la seule solution de $C\vec{x} = \vec{0}$.

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V . Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.
- b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V , alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V .
- c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$.
- d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel.

Sol.:

- a) Vrai. Les vérifications des axiomes d'espace vectoriel et de sous-espace vectoriel sont immédiates dans ce cas.
- b) Faux. Par exemple $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} bien que $0 \in \mathbb{Z}$.
- c) Vrai. Une matrice A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si $\text{rang}(A) = n$ et donc, par le théorème du rang, si et seulement si $\dim \text{Ker}(A) = 0$. Ceci est équivalent à dire $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$.
- d) Faux. Le noyau d'une matrice est *toujours* un espace vectoriel.

Exercice 6

Vous pouvez ignorer la partie (b), qui est longue à résoudre sans connaître les propriétés spéciales des matrices de Vandermonde.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a & 6 \end{pmatrix}$. Calculer le noyau et l'image de A en fonction des valeurs du paramètre réel a . Déterminer quand la matrice A est inversible.

b) Calculer le noyau et le rang de la matrice de Vandermonde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ en fonction des valeurs du paramètre réel a .

Sol.:

a) On calcule $\det(A) = 6 - a^2 + a$. Donc, si $a \neq -2$ ou $a \neq 3$, $\det(A) \neq 0$ et A est inversible. Dans ce cas, $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^2$ et $\text{Ker}(A) = 0$.

Si $a = -2$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Donc $\text{Im}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\text{Ker}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $a = 3$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Donc $\text{Im}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\text{Ker}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Par l'Exercice 9 de la série 5, on calcule

$$\det(B) = (2-1)(2-a)(2-(-1))(-1-1)(-1-a)(a-1) = 6(a-2)(a+1)(a-1).$$

Si $a \neq 2, -1$ et 1 , alors $\det(B) \neq 0$ et B est inversible. Dans ce cas, $\text{Im}(B) = \mathbb{R}^4$ et $\text{Ker}(B) = 0$.

Si $a = 2, -1$ ou 1 , alors le noyau de B est donné par le noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\text{Ker}(B)$ est un sous-espace de \mathbb{R}^4 de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par le

théorème du rang, on a que $\text{rang}(B) = 4 - \dim \text{Ker}(B) = 4 - 1 = 3$. Ainsi $\text{Im}(B)$ est un sous-espace de \mathbb{R}^4 de dimension 3 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

La notation ci-dessous est un peu différente de la notation qu'on utilise en classe.

Soient $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ et $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ deux bases d'un espace vectoriel V . Supposons que $b_1 = 6c_1 - 2c_2$ et $b_2 = 9c_1 - 4c_2$.

- (a) Calculer la matrice de changement de base $P = (\text{Id}_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de \mathcal{B} vers \mathcal{C} .
- (b) Trouver $(x)_{\mathcal{C}}$ pour $x = -3b_1 + 2b_2$ en utilisant le résultat en (a)

Soient $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ et $\mathcal{D} = \{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ deux bases de \mathbb{R}^2 .

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- (c) Calculer la matrice de changement de base $P = (\text{Id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}}$ de \mathcal{A} vers \mathcal{D} .
- (d) Calculer la matrice de changement de base $Q = (\text{Id})_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}$ de \mathcal{D} vers \mathcal{A} .

Sol.:

- (a) La matrice de changement de base de $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de base de la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{C} :

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

- (b) L'équation $x = -3b_1 + 2b_2$ implique que $(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pour trouver $(x)_{\mathcal{C}}$ il suffit d'utiliser la matrice de changement de base :

$$(\vec{x})_{\mathcal{C}} = (\text{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- (c) Pour trouver la matrice de changement de base de \mathcal{A} vers \mathcal{D} il faut écrire les coordonnées des vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 dans la base \mathcal{D} , c'est à dire trouver les nombres réels x_1 et x_2 tels que $\vec{a}_1 = x_1\vec{d}_1 + x_2\vec{d}_2$ et les nombres réels y_1 et y_2 tels que $\vec{a}_2 = y_1\vec{d}_1 + y_2\vec{d}_2$. Il suffit pour cela de résoudre les deux systèmes :

$$\begin{bmatrix} \vec{d}_1 & \vec{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{a}_1 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \vec{d}_1 & \vec{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \vec{a}_2$$

On peut par exemple les résoudre simultanément comme vu en cours. On trouve $x_1 = -3$, $x_2 = -5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ ce qui donne :

$$P = (\text{Id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

- (d) Pour trouver $Q = (\text{Id})_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}$ il suffit d'inverser P .

$$Q = (\text{Id})_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 8

Dans \mathbb{P}_2 , calculer la matrice de changement de base de la base

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

vers la base canonique $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$. Puis écrire les coordonnées du vecteur $p = -1 + 2t$ dans la base \mathcal{B} .

Sol.:

Pour trouver la matrice de changement de base de \mathcal{B} vers \mathcal{C} , il suffit d'écrire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base \mathcal{B} dans la base canonique \mathcal{C} :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur $x(t) = -1 + 2t$ dans la base standard sont : $(x)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les

coordonnées $(x)_{\mathcal{B}}$ du même vecteur dans la base \mathcal{B} vérifient : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} (x)_{\mathcal{B}} = (x)_{\mathcal{C}}$. Il suffit

d'échelonner la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

pour trouver : $(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que $-1 + 2t = 5(1 - 2t + t^2) - 2(3 - 5t + 4t^2) + (2t + 3t^2)$,

une égalité que l'on aura avantage à vérifier si on ne veut pas perdre trois points à l'examen alors que le raisonnement était parfait.

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Jérôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.